Аграрный научный журнал. 2021. № 11. С. 8–11.
Agrarian Scientific Journal. 2021;(11): 8–11.

АГРОНОМИЯ

Научная статья
УДК 519
doi: 10.28983/asj.y2021i11pp8-11

Построение математической модели внесения удобрения в сельскохозяйственные поля в точном земледелии

Хикмет Гамид оглы Асадов[1], Валида Ханкиши гызы Махмудова[2]
[1,2]НИИ аэрокосмической информатики Национального аэрокосмического агентства, Баку, Азербайджанская Республика, asadzade@rambler.ru

Аннотация. Статья посвящена разработке математической модели внесения удобрения в гетерогенные растительные поля в точном земледелии. Составлена и решена задача оптимального внесения в сельскохозяйственные поля удобрений, содержащих питательные вещества. Рассматривается сельскохозяйственное предприятие, содержащее в своем активе различные земельные участки, где исходное количество питательных веществ на полях по всему предприятию составляет упорядоченное множество, элементы которого растут от минимума до максимума. Получен оптимальный вид функциональной зависимости дополнительно вводимого количества питательных веществ от количества исходно имеющихся таких же веществ на полях, при которых может быть достигнута максимальная эффективность производства растительной продукции.

Ключевые слова: гетерогенные поля, оптимизация, точное земледелие, питательные вещества.
Для цитирования: Асадов Х. Г., Махмудова В. Х. Построение математической модели внесения удобрения в сельскохозяйственные поля в точном земледелии // Аграрный научный журнал. 2021. № 11. С 8–11. http://dx.doi.org/ 10.28983/asj.y2021i11pp8-11.

AGRONOMY

Original article

Construction of a mathematical model of fertilizer application in agricultural fields in precision agriculture

Hikmet H. o. Asadov1, Valida Kh. g. Mahmudova[2]
[1,2]Institute of Aerospace Informatics, National Aerospace Agency, Baku, Azerbaijan Republic, asadzade@rambler.ru

Abstract. The article is devoted to the development of a mathematical model of fertilization in heterogeneous plant fields in precision farming. The problem of the optimal introduction of fertilizers containing nutrients into agricultural fields has been compiled and solved. An agricultural enterprise is considered that contains various land plots in its assets, where the initial amount of nutrients in the fields throughout the enterprise is an ordered set, the elements of which grow from minimum to maximum. An optimal type of functional dependence of the additionally introduced amount of nutrients on the amount of initially having the same substances in the fields was obtained, at which the maximum efficiency of the production of plant products in heterogeneous fields can be achieved.

Keywords: heterogeneous fields, optimization, precision farming, optimization, nutrients.
For citation: Asadov H. H. o., Mahmudova V. Kh. g. Construction of a mathematical model of fertilizer application in agricultural fields in precision agriculture. Agrarnyy nauchnyy zhurnal = Agrarian Scientific Journal. 2021;(11): (In Russ.). http://dx.doi.org/ 10.28983/asj.y2021i11pp8-11.

Введение. Необходимо отметить, что цифровизация экономики неизбежно распространяется и на сельское хозяйство, производство селькохозяйственной продукции приобретает индустриальный характер. Известны случаи, когда производство пшеницы было осуществлено без участия человека, с помощью запрограммированных роботов [1]. Нет сомнений в том, что решение продовольственной проблемы возможно как путем выращивания продуктивных видов растений, так и путем оптимизации всей технологической цепочки сельхозпроизводства и использования высокоэффективных машин и оборудования. Здесь особую роль играет общее концептуальное направление, именующееся точным земледелием. Это направление базируется на передовых достижениях информационных технологий. Широко используются такие информационные технологии и технические средства, как географические информационные системы, GPS, дистанционное зондирование, беспилотные летательные средства и др.

Согласно [2], улучшение сельскохозяйственных технологий выращивания продукции должно быть осуществлено с учетом местных условий. Вместе с тем все сельские районы должны рассматриваться как единое целое, где должны быть применены технологии точного земледелия [3, 4].

Целью точного земледелия является увеличение урожая и продуктивности сельского хозяйства при уменьшении объемов загрязнения окружающей среды [2]. Этого можно достичь путем построения адекватных математических моделей сельскохозяйственного производства, в частности моделей снабжения сельского хозяйства вспомогательными материалами и техникой.

Одним из важнейших положений современной концепции точного земледелия является защита окружающей среды от загрязнения [5]. Вместе с тем, с ростом населения планеты продолжает оставаться острой проблема обеспечения продовольствием. Для ее решения в настоящее время привлекаются различные ресурсосберегающие программы, базирующиеся на математическом моделировании. Важное место отводится модернизации или оптимизации существующих технологий сельскохозяйственного производства. Разрабатываются оптимизационные технологии использования ирригационных вод, ручного труда, технических средств и т.д. В частности, широко используются методы линейного и стохастического программирования, принцип максимума Понтрягина и другие методы [5, 6]. При этом создаваемые математические модели базируются на проводимых натурных экспериментах по исследованию роста растений в различных условиях [7].

Сельскохозяйственное производство является сложнейшим технологическим процессом, глобальная оптимиза-

© Асадов Х. Г. о., Махмудова В. Х. г., 2021

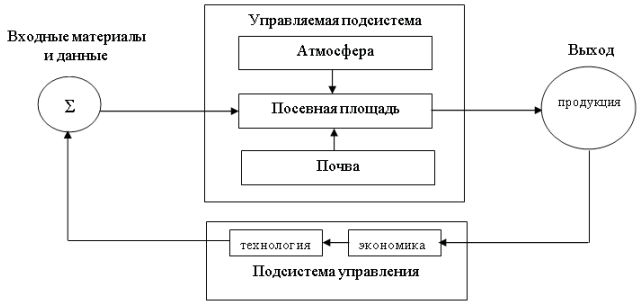

Рис. 1. Агроэкосистемная модель выращивания сельхозпродукции по технологии точного земледеления

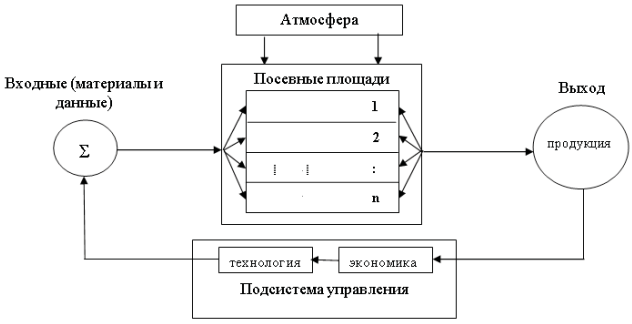

Рис. 2. Предлагаемая модель агроэкосистемы, содержащей растительные поля с различным содержанием питательных веществ

ция которого все еще остается нерешенной задачей. В связи с этим мы считаем, что имеет смысл разрабатывать частные оптимизированные технологии, служащие для решения отдельных технологических задач сельскохозяйственного производства. В настоящей статье рассматриваются вопросы оптимизации внесения удобрений в растительные поля сельскохозяйственных производственных единиц, характеризующихся значительной гетерогенностью свойств земельных участков.

Методика исследований. Предлагаемая модель основывается на агроэкологическом подходе к моделированию сельскохозяйственного производства. Всякая агроэкосистема характеризуется четырьмя группами факторов: биологические, метеорологические, почвенные и антропогенные. Агроэкологический подход рассматривает всю агроэкосистему и множество связей в ее пределах, но не отдельную компоненту. Целью агроэкологической практики является, прежде всего, оптимизация существующего технологического процесса.

Результаты исследований. *Построение структурной модели сельскохозяйственного производственного предприятия, содержащего гетерогенные земельные участки с различным содержанием питательных веществ.* Согласно [8], любая система выращивания растительной продукции содержит две подсистемы. К ним относятся управляемая подсистема (агроэкосистема) и подсистема управления. Модель агроэкосистемы, рассматриваемая в качестве базовой, показана на рис. 1.

Как было отмечено выше, наше исследование направлено на изучение оптимизации всего технологического цикла выращивания растительной продукции на всем множестве гетерогенных сельскохозяйственных полей, где содержание питательных веществ изменяется от минимума до максимума. Соответствующая модель рассматриваемой агроэкосистемы показана на рис. 2.

Мы считаем, что количественные оценки содержания питательных веществ в рассматриваемых полях составляют упорядоченное множество, где

$$F = \{f_i\}; i = \overline{1,n}; \quad n - \text{количество полей} \tag{1}$$

$f_i = f_{i-1} + \Delta f;\ f_0 = 0; f -$ количество питательных веществ в поле.

Как отмечается в работе [9], объем выращенной растительной продукции является стохастической (случайной) величиной. Однако количество питательных веществ в удобрении, вносимом в поле, является либо независимой, либо случайной величиной. При этом функция Y = φ (*f*) является монотонно растущей (в интервале $(0 \div f_{opt})$ и монотонно убывающей (в интервале $(f_{opt} \div f_{max})$), рис. 3.

Как показывает рис. 3, при $f \rightarrow f_{opt}$ происходит насыщение кривой и дальнейшее увеличение f приводит к уменьшению производимой продукции.

Согласно [9], такое свойство технологии выращивания сельхозпродукции может быть смоделировано с помощью следующих функций:

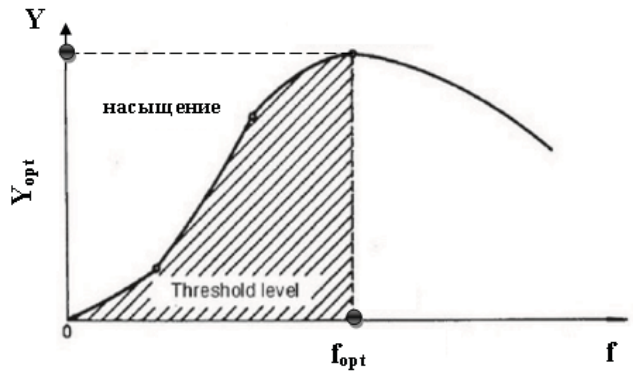

Рис. 3. Зависимость плодородия полей от количества питательных веществ в почве

$$y = bf + cf^2; \tag{2}$$

$$y = b\sqrt{f} + cf; \tag{3}$$

$$y = af^b \cdot e^{-cf}; \tag{4}$$

$$y = af^b \cdot (k - f)^c, \tag{5}$$

где b, c, k = const.

При этом следует учесть, что показатель f является суммой

$$f = f_1 + f_2\ , \tag{6}$$

где f_1 – количество дополнительно вносимых в поле питательных веществ; f_2 – количество питательных веществ, исходно имеющихся в почве.

© Асадов Х. Г. о., Махмудова В. Х. г., 2021

Согласно [8], наиболее адекватным для моделирования рассматриваемого процесса является выражение (4). Следовательно, для построения математической модели принимаем следующее выражение:

$$y = a(f_1 + f_2)^b exp[-c(f_1 + f_2)]. \quad (7)$$

Суммируя (7) по всем f_{1i}, $i = \overline{1,n;}$ получим

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} a(f_1 + f_2)^b exp[-c(f_1 + f_2)]. \quad (8)$$

Введя на рассмотрение функцию управления

$$f_2 = \varphi(f_1), \quad (9)$$

составим задачу оптимизации

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} a[f_{1i} + \varphi(f_{1i})]^b exp\{-c[f_{1i} + +\varphi(f_{1i})]\} \to max. \quad (10)$$

Таким образом, решение задачи (10) в смысле нахождения оптимальной функции $\varphi(x_1)$ позволит оптимизировать весь рассматриваемый технологический процесс выращивания растительности.

Модельное решение задачи (10). Основу предлагаемого модельного решения оптимизационной задачи (10) составляет использование с этой целью непрерывного аналога выражения (10). Таким образом, оптимизируемый целевой функционал имеет следующий вид:

$$\chi_н = \frac{1}{f_{1max}} \int_0^{f_{1max}} a[f_1 + \varphi(f_1)]^b exp\{-c[f_1 + \varphi(f_1)]\} df_1. \quad (11)$$

Смысл проводимой оптимизации заключается в нахождении такой функции $\varphi(f_1)$, при которой функционал (11) достиг бы максимальной величины.

Согласно методу Эйлера [10], оптимальная функция $\varphi(f_1)_{opt}$, приводящая функционал (11) к максимальной величине, должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial\left\{a[f_1+\varphi(f_1)]^b exp\{-c[f_1+\varphi(f_1)]\}\right\}}{\partial\varphi(f_1)} = 0. \quad (12)$$

Из условия (12) получаем

$$ab[f_1 + \varphi(f_1)]^{b-1} \cdot exp\{-c[f_1 + \varphi(f_1)]\} = ac[f_1 + \varphi(f_1)]^b \cdot exp\{-c[f_1 + \varphi(f_1)]\}. \quad (13)$$

После некоторых преобразований из (13) получаем

$$b = c[f_1 + \varphi(f_1)]. \quad (14)$$

Из (14) находим

$$\varphi(f_1) = \frac{b}{c} - f_1. \quad (15)$$

Можно показать, что при решении (15) функционал (11) достигает максимальной величины. Для этого достаточно вычислить вторую производную интегранта в (11) по $\varphi(f_1)$ и показать, что она всегда имеет отрицательное значение.

Заключение. В ходе исследования составлена и решена задача оптимального внесения в сельскохозяйственные поля удобрений, содержащих питательные вещества. Рассматривается сельскохозяйственное предприятие, имеющее в своем активе различные земельные участки, где исходное количество питательных веществ на полях составляет упорядоченное множество, элементы которого растут от минимума до максимума.

Получен оптимальный вид функциональной зависимости дополнительно вводимого количества питательных веществ от количества исходно имеющихся на полях, при которой может быть достигнута максимальная эффективность производства растительной продукции на гетерогенных полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Medennikov V., Raikov A. Formation of the digital platform for precision farming with mathematical modeling // Supplementary Proceedings of the XXII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains. 2020. Vol. 2790. P. 121–133.

2. Rossel D., Ortiz-Laurel H., Kanswohl N., Schlegel M. Mathematical modelling for precisely improving inputs supply for crop production // Agronomy Research. 2008. Vol. 6. P. 307–314.

3. Rohrbach R. P., Brazee R. D., Barre H. J. Evaluating precision planting model // Transactions of the ASAE. 1971. Vol. 14. P. 1146–1149.

4. Viscarra R. R. R., McBratney A. B. Soil chemical analytical accuracy and costs; implications from precision agriculture// Australian Journal of Experimental Agriculture. 1998. Vol. 38. P. 765–775.

5. Romanenkov V. A., Sirotenko O. D. Mathematical models of life support systems// Mathematical Models of Agricultural Supply. URL: iacj.eu/index.php/iacj/issue.

6. Beznosov G. A., Skvortsov E. A., Semin A. N., Nekrasov K. V., Ziablitckaia N. V., Nabokov V. I. Economic and mathematical modeling the system of precision agriculture. URL: https://doi.org/10.14456/ITJEMAST.2019.4.

7. Rizkiana A., Nugroho A. P., Irfan M. A., Sutiarso L., Okayasu T. Crop growth prediction model at vegetative phase to support the precision agriculture application in plant factory// AIP Conference Proceedings. 27 December 2019. URL: https://doi.org/10.1063/1.5141717.

© Асадов Х. Г. о., Махмудова В. Х. г., 2021

8. *S*adovski A. Precision agriculture through agroecological approach and mathematical modeling // Ecological Engineering and Environment Protection. 2020. No. 2. P. 63–69.

9. Sadovski A. N. Determination and use of the soil equivalent in fertilizer experiments // Rastenievadni nauki. 2020. Vol 58. No. 1. P. 62–67.

10. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1974. 432 с.

REFERENCES

1. Medennikov V., Raikov A. Formation of the digital platform for precision farming with mathematical modeling. Supplementary Proceedings of the XXII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains. 2020; 2790):121–133.

2. Rossel D., Ortiz-Laurel H., Kanswohl N., Schlegel M. Mathematical modelling for precisely improving inputs supply for crop production. *Agronomy Research.* 2008;(6):307–314.

3. Rohrbach R. P., Brazee R. D., Barre H. J. Evaluating precision planting model.Transactions of the ASAE. 1971;(14):1146–1149.

4. Viscarra R. R. R., McBratney A. B. Soil chemical analytical accuracy and costs; implications from precision agriculture. *Australian Journal of Experimental Agriculture.* 1998;(38):765–775.

5. Romanenkov V. A., Sirotenko O. D. Mathematical models of life support systems. *Mathematical Models of Agricultural Supply.* URL: iacj.eu/index.php/iacj/issue.

6. Beznosov G. A., Skvortsov E. A., Semin A. N., Nekrasov K. V., Ziablitckaia N. V., Nabokov V. I. *Economic and mathematical modeling the system of precision agriculture.* URL: https://doi.org/10.14456/ITJEMAST.2019.4.

7. Rizkiana A., Nugroho A. P., Irfan M. A., Sutiarso L., Okayasu T. Crop growth prediction model at vegetative phase to support the precision agriculture application in plant factory. AIP Conference Proceedings. 27 December 2019. URL: https://doi.org/10.1063/1.5141717.

8. Sadovski A. Precision agriculture through agroecological approach and mathematical modeling. *Ecological Engineering and Environment Protection.* 2020;(2):63–69.

9. Sadovski A. N. Determination and use of the soil equivalent in fertilizer experiments. Rastenievadni nauki. 2020:58(1):62–67.

10. Elsgol'ts L. E. Differential equations and calculus of variations. M.: Nauka, 1974. 432 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 24.08.2021; одобрена после рецензирования 22.09.2021; принята к публикации 29.09.2021.
The article was submitted 24.08.2021; approved after reviewing 22.09.2021; accepted for publication 29.09.2021.

© Асадов Х. Г. о., Махмудова В. Х. г., 2021